22/11/16.

Τυχαίος Περίπατος

X_n: η σ.δ. που περιγράφει την κίνηση ενός σωματιδίου στον άξονα των πραγμ. αριθμών. Όταν η κίνηση του σωματιδίου είναι τυχαία τότε λέμε ότι έχουμε έναν <u>τυχαίο περίπατο</u>. Έστω X_0 η αρχική θέση του σωματιδίου. Τότε $X_1 = X_0 + Z_1 \rightarrow$ η τ.μ. που περιγράφει την 1η μετατόπιση. $X_2 = X_1 + Z_2 \rightarrow$ 2η μετ/ση.

$$= X_0 + Z_1 + Z_2$$

$$X_3 = X_2 + Z_3 = X_0 + Z_1 + Z_2 + Z_3$$

$$! \; X_n = X_0 + \sum_{i=1}^{n} Z_i$$

<u>Ελεύθερος</u> είναι εκείνος ο τυχαίος περίπατος που η κίνησή του δεν περιορίζεται.

Όταν η κίνηση ~~ενός~~ ~~περιπάτου~~ του σωματιδίου περιορίζεται έτσι ώστε όταν φτάνει σ' ένα σημείο να μπορεί να κινηθεί μόνο ως προς μία κατεύθυνση, τότε λέμε ότι έχουμε τυχαίο

Περίπατο με φράγματα ανάκλασης.
Όταν η κίνηση του σωματιδίου φτάνει σ' ένα συγκεκριμένο σημείο και σταματά τότε λέμε ότι έχουμε τυχαίο περίπατο με φράγματα απορρόφησης

Απλός τυχαίος περίπατος είναι εκείνος όπου οι μεταβλητές του Z_i, είναι διακριτές τ.μ. με δυνατές τιμές $1, -1, 0$ (βήματα) → ανεξάρτητες κ' ισόνομες
με συν/ση πιθανότητας:

$$P(Z_i = z) = \begin{cases} p, & z=1 \\ q, & z=-1 \\ 1-p-q, & z=0 \end{cases}$$

Σε όσα ακολουθούν, υποθ. ότι το X_0 που παριστάνει την αρχική θέση του σωματιδίου είναι το 0.

Άσκηση: Ο Σπύρος κ' Γεωργία παίζουν παιχνίδι. Η πιθ. να κερδίσει ο Σ ένα παιχνίδι είναι 1/2 ενώ η Γ 1/2.
(i) Ποια η πιθ. μετά από 10 παιχνίδια η Γ να έχει 2 νίκες περισσότερες.
(ii) Ποια η πιθ. μετά από 200 παιχνίδια η Γ να προηγείται στις νίκες 20-30.
Λύση. Έστω X_n: τ.μ. που παριστά τον αριθμό των περισσότερων νικών της Γ μετά το n-οστό παιχνίδι.

$X_0 = 0$
$X_1 = Z_1$
$X_2 = X_1 + Z_2 = Z_1 + Z_2$
$X_n = \sum_{i=1}^{n} Z_i$

$$P(Z_i = z) = \begin{cases} p = 1/3, & z=1 \\ q = 1/2, & z=-1 \\ 1-p-q, & z=0 \end{cases}$$

Πρόκειται για ~~...~~ απλό τυχ. περίπατο.

(i) $P(X_{10} = 2)$ ‖ Εύρεση της $P(X_n = k)$ όταν $X_0 = 0$ κ' $k > 0$.
(ii) $P(20 \leq X_{200} \leq 30)$ ‖ Εύρεση $P(k_1 \leq X_n \leq k_2)$, $X_0 = 0$, $k_1, k_2 > 0$.

Το σωματίδιο κάνει συνολικά n το πλήθος μετ/σεις – βήματα, οι οποίες είναι 1 βήμα δεξιά, είτε 1 βήμα αριστερά, είτε την αναπαύση.

Βήματα δεξιά → έστω n_1 το πλήθος

—//— αριστερά → έστω n_2 το πλήθος

αναπηδήσεις → έστω n_3 το πλήθος.

Επομένως $n_1+n_2+n_3=n$

και $n_1-n_2=k$ (για να έχω $X_n=k$), $k>0$

• Αν $k<0$ είτε $n_2-n_1=k$ και προσαρμόζω ανάλογα την απόδ. είτε μελετώ άλλη σ.δ. με $k'>0$, δηλ $P(\text{κέρδος } \Gamma=-7) = P(\text{κέρδος } \Sigma=7)$

$$P(X_n=k) = P\left(\begin{matrix} n_1 \text{ βήματα δεξιά} \\ n_2 \text{ -//- αρ.} \\ n_3 \text{ αναπηδήσεις}\end{matrix} \;\middle|\; \text{με } n_1+n_2+n_3=n,\ n_1-n_2=k\right) \overset{(*)}{=}$$

Παρατηρήσεις: (1) Τα n_1, n_2, n_3 ΔΕΝ είναι μοναδικά!

(2) Αν δεν έχω αναπήδηση $\Rightarrow n_3=0$ και τότε $n_1+n_2=n$ κ' $n_1-n_2=k \Rightarrow n_1, n_2$ Μοναδικά!!

$$\overset{(*)}{=} \sum_{\substack{n_1+n_2+n_3=n \\ n_1-n_2=k}} P\left(\begin{matrix} n_1 \text{ βημ. δεξιά} \\ n_2 \text{ -//- αρ.} \\ n_3 \text{ αναπηδ.}\end{matrix}\right) \cancel{\underline{\text{πολλ/κός κανόνας}}} \cancel{\sum_{\substack{n_1+n_2+n_3=n \\ n_1-n_2=k}} \frac{n!}{\quad}}$$

$\square\ \square \dots \square$ n-βήματα

επιλέγω n_1-κουτιά $\binom{n}{n_1} = \frac{n!}{n_1!(n-n_1)!}$ ← αντίστοιχη πιθ. p^{n_1}

Επιλέγω απ' τα υπολ. κουτιά που είναι $(n-n_1)$ άρα θα επιλέξω $n_2 \Rightarrow$ δηλ $\underbrace{\binom{n-n_1}{n_2} = \frac{(n-n_1)!}{n_2!(n-n_1-n_2)!}}_{\text{αντιστ. πιθ. } q^{n_2}}$

Άρα ~~κουτιά~~ μένουν $n-n_1-n_2$ κ' θέλω να επιλέξω n_3 κουτιά

δηλ $\underbrace{\binom{n-n_1-n_2}{n_3} \overset{n=n_1+n_2+n_3}{=} \binom{n_3}{n_3} = 1.}_{\text{αντιστ. πιθ.: } (1-p-q)^{n_3}}$

$$\underline{\text{πολλ/κός κανόνας}} \quad \sum_{\substack{n_1+n_2+n_3=n \\ n_1-n_2=k}} \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot n_3!} p^{n_1} q^{n_2} (1-q-p)^{n_3}$$

Παρατηρήσεις: (1) Αν $\nexists$ ισοπαλία τότε η πιθ. $X_n=k =$

$$= P\left(\begin{matrix} n_1 = \frac{n+k}{2} \\ n_2 = n - \frac{n+k}{2} = \frac{n-k}{2} \end{matrix}\right) = \text{και } n_1+n_2=n,\ n_1-n_2=k$$

$$= \frac{n!}{n_1!\, n_2!} p^{n_1} \cdot q^{n_2} = \frac{n!}{n_1!(n-n_1)!} p^{n_1} \cdot q^{n-n_1}$$

Πολυωνυμική Κατανομή: Έστω τυχαίο πείραμα που αποτελείται από n-το πλήθος δοκιμές κ' η καθεμία έχει m-διακεκριμένα αποτελέσματα, ξένα μεταξύ τους. Έστω τα ενδεχόμενα $C_1, \dots, C_m$ με αντιστ. πιθ. $p_1, \dots, p_m$ κ' $\sum_{i=1}^{m} p_i = 1$. Οι δοκιμές είναι ~~α~~ ανεξάρτητες κ' οι πιθαν. παραμένουν αμετάβλητες σε κάθε δοκιμή. Έστω $X_1, \dots, X_m$ οι τ.μ. που παριστάνουν τον αριθμό των φορών που εμφανίζεται το ενδεχόμενο $C_1, \dots, C_m$ στις n-δοκιμές. Τότε η πιθ.

$$P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_m = x_m) = \frac{n!}{x_1! \cdots x_m!} p^{x_1} \cdots p^{x_m}$$

με $\sum_{i=1}^{m} x_i = n$.

(ii) $P(k_1 \le X_n \le k_2) = \sum_{\mu = k_1}^{k_2} P(X_n = \mu) = \underbrace{\sum_{\mu = k_1}^{k_2} \sum_{\substack{n_1 + n_2 + n_3 = n \\ n_1 - n_2 = \mu}} \frac{n!}{n_1! \, n_2! \, n_3!} p^{n_1} q^{n_2} \cdot (1-p-q)^{n_3}}_{\text{ακριβής τιμή πιθανότητας που ψάχνω.}}$

$X_0 = 0$, $k_1, k_2 > 0$

$P(20 \le X_{200} \le 30)$

$\downarrow k_1$ $\quad \downarrow k_2$

$n_1 + n_2 + n_3 = 200$

$n_1 - n_2 = 20, 21, \dots, 30$

Προσέγγιση:

Κεντρικό Οριακό Θεώρημα (Στατιστική): Έστω $Y_1, \dots, Y_n$ ανεξάρτητες και ισόνομες τυχ. μετ. με πεπερασμένη μέση τιμή και διακύμανση ($EY = \mu$, $\mathrm{Var}\, Y = \sigma^2$). Τότε σύμφωνα με ΚΟΘ για 'μεγάλο' n:

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} Y_i - n\mu}{\sqrt{n \sigma^2}} \xrightarrow{\text{προσ.}} N(0,1)$$

άρα $P(k_1 \le X_n \le k_2) \xrightarrow[\text{ότι } X_n = \sum_{i=1}^{n} Z_i]{\text{έχω αποδ.}} P\left(k_1 \le \sum_{i=1}^{n} Z_i \le k_2\right) \overset{(*)}{=}$

όπου Z_i ανεξ/τες κ' ισόνομες τ.μ.

~~$P(Z_i)$~~ $P(Z_i = z) = \begin{cases} p, & z = 1 \\ q, & z = -1 \\ 1-p-q, & z = 0 \end{cases}$

$\mu = 1 \cdot p + (-1) \cdot q + 0 \cdot (1-p-q) = p - q$

$\sigma^2 = \mathrm{Var}\, Z = EZ^2 - (EZ)^2 = EZ^2 - \mu^2$

$Eh(Z) \overset{Z:\text{διακρ}}{=\!=\!=} \sum h(z) P(Z=z)$ άρα: $EZ^2 = 1^2 \cdot p + (-1)^2 \cdot q + 0^2 \cdot (1-p-q) =$
$= p+q$

(*) Παρατήρηση: $\boxed{\text{Διόρθωση Συνέχειας}}$: Στην Περίπτωση Προσέγγισης διακριτών τ.μ. από συνεχή τ.μ., την κανονική, θα πρέπει να εφαρμόζουμε τη διόρθωση συνέχειας στις υπό εύρεση πιθ. έχουμε ισότητες

(**) $$P\left(k_1 - \tfrac{1}{2} \leq \sum Z_i \leq k_2 + \tfrac{1}{2}\right) = P\left(\frac{k_1 - 1/2 - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}} \leq \frac{\sum Z_i - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}} \leq \frac{k_2 + \frac{1}{2} - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}}\right)$$

$$\simeq \Phi\left(\frac{k_2 + 1/2 - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}}\right) - \Phi\left(\frac{k_1 - 1/2 - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}}\right)$$

η α.σ.κ. της $N(0,1)$

Παρατηρήσεις: ① Ποια η πιθ. το $X_n > \alpha$ για $n \to \infty$, $\mu > 0$,

$P(X_n > \alpha) = 1 - P(X_n \leq \alpha) =$ $\quad \alpha$: μεγάλος θετικός αρ.

$= 1 - P(\sum Z_i \leq \alpha) =$ $\quad \sigma^2 < +\infty$.

$\simeq 1 - \Phi\left(\frac{\alpha + 1/2 - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}}\right) = 1 - \Phi(-\infty) = 1 - 0 = 1.$

② Η $P(X_n \leq b) =$, $n \to \infty$, $\overset{p-q}{\mu} < 0$, $b < 0$ (πολύ μικρός)

$$= P(\sum Z_i \leq b) \simeq \Phi\left(\frac{b - 1/2 - n \cdot \mu}{\sqrt{n\sigma^2}}\right) = \Phi(+\infty) = 1.$$

Άσκηση ④ (Ίδια με ⑦).

$$P = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ \vdots \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & \cdots \end{array} \\ \begin{bmatrix} q & p & 0 & 0 & \cdots \\ q & 0 & p & 0 & \cdots \\ q & 0 & 0 & p & \cdots \\ & & & & \\ & & & & \end{bmatrix} \end{array}$$

$p_{00}^{(2)}$, $p_{01}^{(2)}$, $p_{02}^{(2)}$

$p_{i0}^{(2)}$, $p_{i1}^{(2)}$, $p_{i\,i+2}^{(2)}$, $i = 1, 2, \ldots$

$p_{00}^{(2)} = P\left(0 \begin{smallmatrix} \nearrow 0 \to 0 \\ \searrow 1 \to 0 \end{smallmatrix}\right) = q^2 + p \cdot q =$
$= q(\underbrace{p+q}_{1}) = q$

(*) Αν είχα $f_{00}^{(2)}$ ΔΕΝ θα έπαιρνα την 1η διαδρομή.

$p_{01}^{(2)} = P\left(0 \begin{smallmatrix} \xrightarrow{q} 0 \xrightarrow{p} 1 \\ \xrightarrow{p} 1 \xrightarrow{0} 1 \end{smallmatrix}\right) = q \cdot p$

$p_{02}^{(2)} = P\left(0 \begin{smallmatrix} \xrightarrow{q} 0 \xrightarrow{0} 2 \\ \xrightarrow{p} 1 \xrightarrow{p} 2 \end{smallmatrix}\right) = p^2$ $\quad \Big\|$ $\quad p_{i0}^{(2)} = P\left(i \begin{smallmatrix} \xrightarrow{q} 0 \xrightarrow{q} 0 \\ \xrightarrow{p} i+1 \xrightarrow{q} 0 \end{smallmatrix}\right) = q^2 + p \cdot q = q(p+q) = q$

$p_{i1}^{(2)} = q \cdot p$, $p_{ii+2}^{(2)} = p^2$

<u>Υποδ. για ασκ. 7</u> : f_{00}^{*} , $\mu_0 = ?$

$f_{00}^{(1)} = P(0 \to 0) = q$

$f_{00}^{(2)} = P(0 \to 1 \to 0) = p \cdot q$

↑ για 1η φορά στο 2ο βήμα

$f_{00}^{(3)} = P(0 \to 1 \to 2 \to 0) = p^2 \cdot q$

$$\boxed{f_{00}^{(n)} = p^{n-1} \cdot q}$$

$$f_{00}^{*} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{00}^{(n)} = \sum_{n=1}^{+\infty} p^{n-1} \cdot q = q \sum_{n=1}^{\infty} p^{n-1} = q \frac{1}{1-p} = q.$$

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} x^n = (1-x)^{-1}}$$

$$\mu_0 = \sum_{n=1}^{+\infty} n \cdot p^{n-1} \cdot q \overset{(*)}{=} q \cdot \frac{1}{(1-p)^2} = \frac{1}{q}$$ → θετικώς επιμεκές.

$(*)$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = (1-x)^{-2}.$